5 - الهندسة في الفضاء

معـــارف

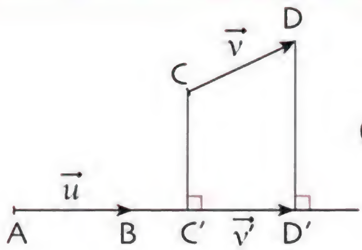
I - الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تعريف

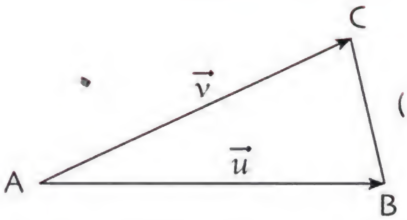
$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير منعدمين من المستوي، O ، A ، B ، C نقط مختلفة من نفس المستوي
الجدول التالي يلخص تعاريف الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أو للشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$).

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$ حيث $\vec{v}'$ المسقط للشعاع $\vec{v}$ على حامل $\vec{u}$.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ حيث C'،D' المسقطان العموديان للنقطتين D،C على المستقيم (AB). (الشكل 1)
$\vec{v}.\vec{u} = \|\|\vec{u}\|\|.\|\|\vec{v}\|\| \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (الشكل 1)	$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{CD} = AB.CD \cos(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{CD})$ (الشكل 1)
في أساس متعامد و متجانس $(\vec{i}\,;\vec{j})$ حيث $\vec{u}(x\ ;\ y)$ و $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ يكون $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$	في معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{i},\vec{j})$ حيث $A(x\ ;\ y)$ ؛ $B(x'\ ;\ y')$ يكون $\overrightarrow{OA}.\ \overrightarrow{OB} = xx' + yy'$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\|\vec{u}\|\|^2+\|\|\vec{v}\|\|^2-\|\|\vec{v}-\vec{u}\|\|^2\right]$ (الشكل 2)	$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right]$ (الشكل 2)

(الشكل 1)



(الشكل 2)



ملاحظة : • إذا كان أحد الشعاعين منعدما فإن الجداء السلمي لهما منعدم.
• نقبل أن الشعاع $\vec{o}$ عمودي على أي شعاع من المستوي.

حالة خاصة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

• المسافة بين نقطة و مستقيم في المستوي

الستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

المسافة بين النقطة $A(x_0\ ;\ x_0)$ و المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $ax + by + c = 0$
حيث $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ هي $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

• خاصية

A ، B ، M نقط من المستوي حيث $A \neq B$.

$\overrightarrow{MA}\ .\overrightarrow{MB} = 0$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$.

II - الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء. A ، B ، C نقط حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في مستو يشمل النقط A ، B ، C.

ملاحظة : كل خواص الجداء السلمي، المدروسة في الهندسة المستوية، تطبق على النقط و على الأشعة، من نفس المستوي، في الفضاء.

. خواص

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ أشعة من الفضاء.

- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k\,(\vec{u}.\vec{v})$ حيث $k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

نتيجة : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

العبارة التحليلية

$\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ و $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ شعاعان في الأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

. تعامد شعاعين

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

$\vec{u}.(x\,;\,y\,;\,z)$ و $\vec{v}.(x'\,;\,y'\,;\,z')$ شعاعان في الأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $xx' + yy' + zz' = 0$.

ملاحظة : نقبل أن الشعاع $\vec{0}$ عمودي على أي شعاع من الفضاء.

معيار شعاع : $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ أساس متعامد و متجانس. $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ و شعاع. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

. المسافة بين نقطتين

- المسافة بين النقطتين A ، B يرمز لها AB هي $\|\overrightarrow{AB}\|$. نكتب $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- $A(x\,;\,y\,;\,z)$ ، $B(x'\,;\,y'\,;\,z')$ نقطتان من الفضاء و المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لدينا $AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

III - المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 . تمثيل وسيطي لمستقيم

لتكن النقطة $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$، و الشعاع $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ غير المنعدم.

المستقيم (D) الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه له هو مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ حيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ مع λ عدد حقيقي.

$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ يكافئ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$. هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

2 . معادلات ديكارتية لمستقيم

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ ويقبل $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ شعاع توجيه له يعرف مثلا

بجملة المعادلتين $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \end{cases}$

يعبر عادة عن هذه الجملة كما يلي : $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ حيث a، b و c غير منعدمة.

حالات خاصة

- إذا كان $c = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}$
- إذا كان $b = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$
- إذا كان $a = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$

IV - المستويات في الفضاء

1 . تمثيل وسيطي لمستو

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لتكن النقطة $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ و الشعاعان غير المتوازيين $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ ، $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$. المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه له هو مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ حيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ مع λ و μ عددان حقيقيان.

$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ يكافئ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$. هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

2 . معادلة ديكارتية لمستو

الشعاع الناظمي لمستو

تعريف

(P) مستو في الفضاء.

نسمي شعاعا ناظميا للمستوي (P)، كل شعاع توجيه لمستقيم عمودي على (P).

خاصية مميزة : $\vec{n}$ شعاع غير منعدم، A نقطة من الفضاء.

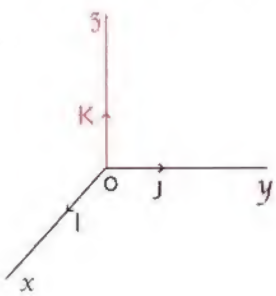
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ ، هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل $\vec{n}$ شعاعا ناظميا له.

معادلة ديكارتية لمستو

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

• لكل مستو (P) شعاعه الناظمي $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ معادلة ديكارتية من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ و d عدد حقيقي.

• مجموعة النقط $M\,(x\,;y\,;z)$ حيث $ax + by + cz + d = 0$ مع $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ و $d \in \mathbb{R}$ هي مستو حيث $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ شعاع ناظمي له.



حالات خاصة : نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

$z = 0$ هي معادلة للمستوي $(o\,;I\,,J)$ و $\vec{k}$ شعاع ناظمي له.

$y = 0$ هي معادلة للمستوي $(o\,;I\,,K)$ و $\vec{j}$ شعاع ناظمي له.

$x = 0$ هي معادلة للمستوي $(o\,;J\,,K)$ و $\vec{i}$ شعاع ناظمي له.

V - توازي مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متوازيان إذا وفقط إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

• إذا كان $abc \neq 0$ فإن : (P) يوازي (P') يكافئ $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

• إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' = \lambda d$ فإن (P) و (P') متطابقان.

VI - تعامد مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متعامدان يكافئ $aa' + bb' + cc' = 0$.

VII - المسافة بين نقطة و مستو

$(o\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

(P) مستو من الفضاء و $ax + by + cz + d = 0$ معادلة له حيث $(a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$ و

$M\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ نقطة من الفضاء.

المسافة بين النقطة A و المستوي (P) هي $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

VIII - التمييز المرجحي

A ، B ، C نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

1. المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح النقطتين A ، B.

حالة خاصة : القطعة المستقيمة [AB] هي مجموعة مراجح النقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين لهما نفس الإشارة.

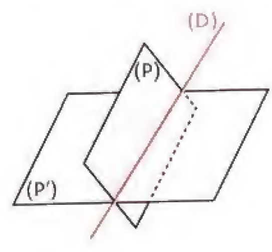
2. المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح النقط A ، B ، C.

IX - الأوضاع النسبية

1. الأوضاع النسبية لمستويين

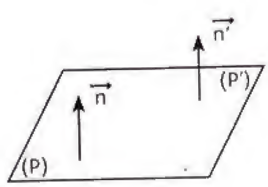
(P) و (P′) مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ شعاعان ناظميان لهما بهذا الترتيب.

- إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطين خطيا (متوازيين) فإن (P) و (P′) متوازيان.
- إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقلين خطيا (غير متوازيين) فإن (P) و (P′) متقاطعان وفق مستقيم.



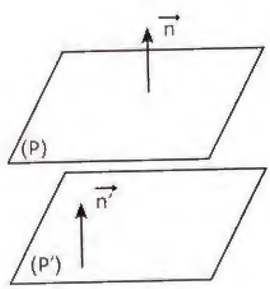
(P) و (P′) متقاطعان

$(P) \cap (P') = (D)$



(P) و (P′) منطبقان

$(P) \cap (P') = (P) = (P')$



(P) و (P′) متوازيان تماما

$(P) \cap (P') = \varnothing$

2 . الأوضاع النسبية لثلاث مستويات

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات.

1• إذا كان (P_1) و (P_2) متوازيين تماما فإن تقاطع (P_1)، (P_2) و (P_3) مجموعة خالية.

2 • إذا كان (P_1) و (P_2) يتقطاعان وفق مستقيم (D) فتوجد ثلاثة حالات :

• إذا كان $(D) \subset (P_3)$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$.

• إذا كان $(P_3) \cap (D) = \{I\}$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{I\}$.

• إذا كان $(P_3) \cap (D) = \varnothing$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \varnothing$.

3 . الأوضاع النسبية لمستقيم و مستو

(D) مستقيم، $\vec{u}$ شعاع توجيه له. (P) مستوي و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له.

• إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدين فإن (D) يوازي (P).

• إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين فإن (D) يقطع (P).

4 . الأوضاع النسبية لمستقيمين

(D)، (D') مستقيمان في الفضاء.

• إذا كان (D) و (D') من نفس المستوي فإن دراسة أوضاعهما النسبية في الفضاء تعود إلى دراسة أوضاعهما النسبية في هذا المستوي.

• إذا لم يوجد مستو يحتوي على (D) و (D') فإنهما غير متوازيين و غير متقاطعين.

1 حساب الجداء السلمي لشعاعين في المستوي

تمرين

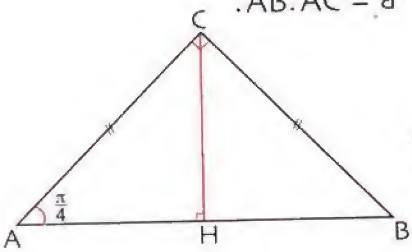
ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين حيث $BC = a$.

احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

حل

ABC مثلث قائم في C. إذن $AB^2 = AC^2 + BC^2$ أي $AB = a\sqrt{2}$.

- طريقة 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\frac{\pi}{4} = a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.
- طريقة 2: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB.AH$



($\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس الإشارة و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) و H منتصف [AB]).

- إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(a\sqrt{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2$. و بالتالي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.
- طريقة 3: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right] = \frac{1}{2}\left[2a^2 + a^2 - a^2\right] = a^2$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

2 حساب المسافة بين نقطة و مستقيم من المستوي

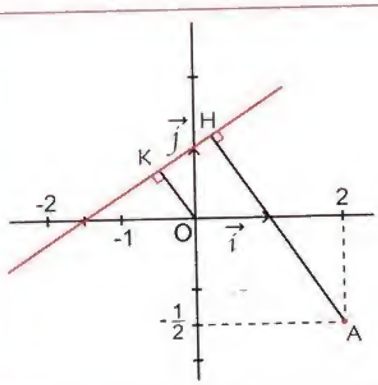
تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

- احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (D).

الذي معادلته $2x - 3y + 3 = 0$.

- احسب المسافة بين النقطة $A\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ و المستقيم (D).



حل

إذا كان K المسقط العمودي للنقطة O على (D) فإن المسافة بين O و (D) هي OK.

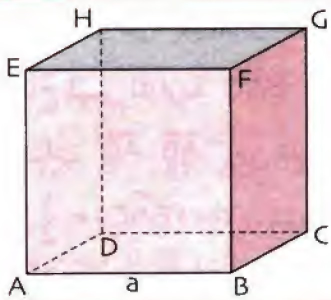
لدينا $OK = \frac{|2(0) - 3(0) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

- إذا كان H المسقط العمودي للنقطة A على (D) فإن $AH = \frac{|2(2) - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$

إذن $AH = \frac{11,5\sqrt{13}}{13}$

3 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

تمرين 1



نفرض المكعب ABCDEFGH المقابل حيث AB = a.

احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BH}$.

حل

- $(DH) \perp (AB)$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH} = 0$
- $(DH) \perp (BC)$ إذن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH} = 0$

((DH) عمودي على كل من (DC) و (DA) فهو عمودي على المستوي (ADC) و بالتالي $(AB) \perp (DH)$. و بالمثل $(BC) \perp (DH)$).

- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB \cos(A\widehat{C}B)$

$= a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BC} = FC.BC \cos\frac{\pi}{4}$ (لأن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

$= (a\sqrt{2})\, a . \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ (لأن $FC^2 = FB^2 + BC^2$)

$\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}\,(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH})$ (لأن $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$)

$= BC^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}$

$= BC^2 = a^2$

((BC) عمودي على (CD) و (CG) فهو عمودي على المستوى (DCG) و بالتالي عمودي على (CH)).

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1 ; -1 , -3)$ ؛ $B(-\sqrt{2}-1 ; 0 , -2)$

$C(-\sqrt{2}-1 ; -2 , -2)$ ؛ $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1 ; -\frac{1}{2} , -\frac{5}{2}\right)$

- احسب المسافتين AB ، AC.
- احسب الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$.

استنتج قيسا للزاوية $B\widehat{A}C$ ثم طبيعة المثلث ABC.

حل

لدينا $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{2} ; 1 ; 1)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(-\sqrt{2} ; -1 ; 1)$ ؛ $\overrightarrow{CD}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

- $AB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1 + 1} = 2$ و $AC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1} = 2$

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1)(-1) + (1)(1) = 2$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$

و النتيجة الأخيرة تثبت أن (AB) و (CD) متعامدان.

استنتاج قيس للزاوية $B\widehat{A}C$: لدينا من جهة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$

و بحساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (من تعريف الجداء السلمي) نجد : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(B\widehat{A}C)$

إذن $\cos(B\widehat{A}C) = \frac{1}{2}$. ينتج أن $\frac{\pi}{3}$ قيس للزاوية $B\widehat{A}C$.

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع ($AB = AC$ و $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$).

4 تعيّين تمثيل وسيطي لمستقيم و توظيفه

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتين $A(1 ; -2 ; -3)$ و $B(-2 ; 2 ; 0)$.

• هل تنتمي النقطة $C(1 ; -3 ; -2)$ إلى المستقيم (D)؟ هل تنتمي النقطة $E(-2 ; -2 ; 0)$ إلى (D)؟

حل

• $\overrightarrow{AB}(-3 ; 4 ; 3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) إذن $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

و هو تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

• $C \in (D)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t يحقق $\begin{cases} 1 - 3t = 1 \\ -2 + 4t = -3 \\ -3 + 3t = -2 \end{cases}$

أو $\begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$. نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد t تحقق هذه الجملة. إذن $C \notin (D)$

• $E \in (D)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t يحقق الجملة $\begin{cases} -2 = 1 - 3t \\ 2 = -2 + 4t \\ 0 = -3 + 3t \end{cases}$ أو $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$.

إذن $t = 1$. و بالتالي $E \in (D)$.

5 تعيّين معادلات ديكارتية لمستقيم في الفضاء

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

حدد المجموعة E من النقط $M(x ; y ; z)$ المعرفة بالتمثيل الوسيطي (S) التالي :

$$(S) \ldots\ldots \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 1 - 3k \end{cases}$$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

أكتب معادلات ديكارتية لها.

حل

• لتكن النقطة $A\,(-3\,;\,-1\,;\,1)$ من E المحصل عليها من أجل $k = 0$، $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ نقطة من E من أجل عدد حقيقي k كيفي.

الجملة (S) تكافئ (S') ... $\begin{cases} x + 3 = 2k \\ y + 1 = -k \\ z - 1 = -3k \end{cases}$ أو المعادلة $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$ حيث $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,-3)$.

إذن المجموعة E هي المستقيم الذي يشمل $A\,(-3\,;\,-1\,;\,-1)$ و يقبل $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,-3)$ شعاع توجيه له.

• كتابة معادلات ديكارتية للمستقيم E. الجملة (S') تكافئ $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$

و هي معادلات للمستقيم E الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

6 تعيّن تمثيل وسيطي لمستو في الفضاء

تمرين 1

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A\,(-1\,;\,-2\,;\,1)$ و يقبل $\vec{u}\left(-2\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$ و $\vec{v}\left(1\,;\,-2\,;\,\frac{1}{2}\right)$ شعاعين توجيهيّين له.

حل

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ؛ λ و μ عددان حقيقيان.

لدينا $A\,(-1\,;\,-2\,;\,1)$ ؛ $\vec{u}\left(-2\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$ ؛ $\vec{v}\left(1\,;\,-2\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

إذن الجملة $\begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = -2 + \frac{1}{2}\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P).

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

• عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقط $A\,(2\,;\,0\,;\,1)$، $B\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ و $C\,(1\,;\,3\,;\,0)$.

• هل تنتمي النقطة O مبدأ المعلم إلى (P)؟ هل تنتمي النقطة $D\,(1\,;\,2\,;\,2)$ إلى (P)؟

حل

$\overrightarrow{AB}\,(0\,;\,1\,;\,-2)$ و $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;\,3\,;\,-1)$ شعاعان. لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متوازيين و هما شعاعان توجيهيان للمستوي (P).

ينتج أن $\begin{cases} x = 2 + 0.\lambda - \mu \\ y = 0 + \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$. الجملة $\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P) الذي يشمل النقط A، B، C.

• $O \in (P)$ يعني أن الجملة (S)... $\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \\ 0 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة $\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \end{cases}$.

هو $(\lambda ; \mu) = (-6 ; 2)$. هذا الحل لا يحقق المعادلة $1 - 2\lambda - \mu = 0$ (لأن $0 \neq 2 - (-6)2 - 1$).

إذن الجملة (S) لا تقبل حلا و بالتالي النقطة O لا تنتمي إلى (P).

• $D \in (P)$ يعني أن الجملة $\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \\ 2 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا، و حل الجملة $\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \end{cases}$

هو $(\lambda ; \mu) = (-1 ; 1)$ و هذا الحل يحقق المعادلة $2 = 1 - 2\lambda - \mu$ أي $(2 = 1 - (-1)2 - 1)$

إذن النقطة D تنتمي إلى (P).

7 تعيين تمثيل وسيطي لمستو في الفضاء

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2 ; 1 ; -1)$، $B(1 ; 0 ; -1)$، $C(-2 ; 4 ; 1)$.

1 . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A، و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

2 . أثبت أن النقط A، B، C تعيّن مستويا. عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

حل

1 . $\overrightarrow{BC}(-3 ; 4 ; 2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني $-3x + 4y + 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$.

(P) يشمل النقطة A يعني $-3(-2) + 4(1) + 2(-1) + d = 0$ أي $d = -8$

إذن $-3x + 4y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2 . النقط A، B، C تعيّن مستويا إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير متوازيين.

لدينا $\overrightarrow{BA}(-3 ; 1 ; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(-3 ; 4 ; 2)$. لا يوجد عدد حقيقي α من أجله يكون $\overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{BA}$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير متوازيين. إذن النقط A، B، C تعيّن مستويا.

• تعيّين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC). إذا كان $\vec{n}(a ; b ; c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل مستقيم من المستوي (ABC). و بالتالي على (AB) و (BC)، إذن $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$.

و بالتالي $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{BA} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} -3a + b + 0c = 0 \\ -3a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} b = 3a \\ c = -\frac{9}{2}a \\ a \neq 0 \end{cases}$.

كل شعاع إحداثياته $\left(a ; 3a ; -\frac{9}{2}a\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و باختيار قيمة للعدد a مثل $a = 2$ يكون $\vec{n}\,(2\,;\,6\,;\,-9)$ شعاعان ناظميا للمستوي (ABC).

و تكون معادلة المستوي (ABC) هي $2x + 6y - 9z + e = 0$ حيث $e \in \mathbb{R}$.

بما أن B نقطة من هذا المستوي فإن $2(1) + 6(0) - 9(+1) + e = 0$

و بالتالي $e = -11$. ينتج أن $2x + 6y - 9z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

8 دراسة تقاطع مستقيمين في الفضاء

تمرين

. الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

(Δ_1) ؛ (Δ_2) ؛ (Δ_3) مستقيمات، تمثيلاتها الوسيطية على التوالي هي :

$u_1\begin{cases} x = -1 + p \\ y = -4 - 3p \\ z = -5 + p \end{cases}$ ؛ $u_2\begin{cases} x = 2 - 5q \\ y = 1 + q \\ z = -3 - 4q \end{cases}$ ؛ $u_3\begin{cases} x = 7 - 7r \\ y = 3r \\ z = -2r \end{cases}$ بحيث p ، q ، r أعداد حقيقية.

ادرس تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) ثم (Δ_2) و (Δ_3).

حل

1 . $\vec{u_1}\,(1\,;\,-3\,;\,1)$ شعاع توجيه لـ (Δ_1) و $\vec{u_2}\,(-5\,;\,1\,;\,-4)$ شعاع توجيه لـ (Δ_2).

نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير متوازيين (لا يوجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{u_2} = \alpha\,\vec{u_1}$)

إذن (Δ_1) و (Δ_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان أو غير مستويين (لا يوجد مستو يحتوي عليها).

للتعرف على وضعية المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) نحل الجملة

$$\begin{cases} -1 + p = 2 - 5q \\ -4 - 3p = 1 + q \\ -5 + p = -3 - 4q \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} p + 5q = 3 \\ 3p + q = -5 \\ p + 4q = 2 \end{cases} \,. \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases}$$

من أجل $p = -2$ نجد النقطة من (Δ_1) ذات الإحداثيات $(-3\,;\,2\,;\,-7)$

من أجل $q = 1$ نجد النقطة من (Δ_2) ذات الإحداثيات $(-3\,;\,2\,;\,-7)$ و هي نفس النقطة من (Δ_1).

إذن (Δ_1) و (Δ_2) يشتركان في النقطة ذات الاحداثيات $(-3\,;\,2\,;\,-7)$.

2 . $\vec{u_3}\,(-7\,;\,3\,;\,-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_3). $\vec{u_2}$ و $\vec{u_3}$ غير متوازيين.

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متوازيين، فهما متقاطعان أو غير مستويين. للتعرف على وضعية المستقيمين

(Δ_2) و (Δ_3) نحل الجملة التالية : $\begin{cases} 2 - 5q = 7 - 7r \\ 1 + q = 3r \\ -3 - 4q = -2r \end{cases}$ أي $\begin{cases} 5q - 7r = 5 \\ q - 3r = -1 \\ 4q - 2r = -3 \end{cases}$

هذه الجملة لا تقبل حلا (لأن حل الجملة $\begin{cases} 5q - 7r = -5 \\ q - 3r = -1 \end{cases}$ هو $(-1\,;\,0)$ و لا يحقق المعادلة $(4q - 2r = -3)$

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متقاطعين و غير متوازيين و بالتالي فهما غير مستويين.

9 دراسة تقاطع مستقيم و مستو في الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) المستوي المعرف بالمعادلة $2x + 3y - z - 1 = 0$

و (D_1) و (D_2) المستقيمان المعرفان على الترتيب بالتمثيلين الوسيطين $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - s \end{cases}$

حيث t و s عددان حقيقيان.

ادرس تقاطع كل من المستوي (P) و المستقيمين (D_1) و (D_2).

حل

$\vec{u}(2\,; 3\,; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، $\vec{v_1}(3\,; -2\,; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D_1)، $\vec{v_2}(1\,; -1\,; -1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D_2).

• الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v_1}$ غير متعامدين (لأن $\vec{u}.\vec{v_1} = 2(3) + 3(-2) + (-1)(1) = -1 \neq 0$)

إذن (P) و (D_1) غير متوازيين. فهما متقاطعان، و تعيّن نقطة تقاطعهما كالآتي:

لدينا $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ ومنه $2(2 + 3t) + 3(1 - 2t) - (3 + t) = 1$ أو $4 - t = 1$ إذن $t = 3$.

إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (D_1) من أجل $t = 3$ هي $(11\,; -5\,; 6)$.

• الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v_2}$ متعامدان (لأن $\vec{u}.\vec{v_2} = 2(1) + 3(-1) + (-1)(-1) = 0$)

إذن (P) و (D_2) متوازيان.

10 تقاطع مستويين

تمرين

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات معادلاتها على الترتيب

$3x - 2y - z + 1 = 0$، $x - y + 2z - 5 = 0$ و $3x - 3y + 6z + 1 = 0$.

ادرس تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ثمّ تقاطع المستويين (P_2) و (P_3).

حل

• دراسة تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) : لدينا $\vec{n_1}(3\,; -2\,; -1)$ و $\vec{n_2}(1\,; -1\,; 2)$ شعاعان ناظميان للمستويين (P_1) و (P_2) على الترتيب. نلاحظ أن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير متوازيين.

إذن (P_1) و (P_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

• تعيّين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نعبر عن x و y مثلا بدلالة z حيث يكون z هو الوسيط.

لدينا $\begin{cases} 3x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 3x - 2y = -1 + t \\ x - y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ يعني $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ x = -\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$

بعد الإختصار نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) و هو $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -16 + 7t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

• تقاطع (P_2) و (P_3) : لدينا $\vec{n}_2\,(1;-1;2)$ و $\vec{n}_3\,(3;-3;6)$ شعاعان ناظميان للمستوي (P_2) و (P_3).

نلاحظ أن $\vec{n}_3 = 3\vec{n}_2$. إذن $\vec{n}_2$ و $\vec{n}_3$ متوازيان. نختار نقطة من (P_2) مثل $A(-5\,;\,0\,;\,0)$.

إحداثيات A لا تحقق معادلة (P_3) أي أن $A \notin (P_3)$. إذن (P_2) و (P_3) متوازيان تماما (أي غير منطبقين).

11 دراسة تقاطع ثلاث مستويات

تمرين 1

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات

$x + y + z = 4$ ، $-x + y - z - 2 = 0$ و $3x + 4y + 3z - 15 = 0$ على الترتيب.

• ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) نحل الجملة (S) ..... $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3x + 4y + 3z = 15 \end{cases}$

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ y = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$. إذن $(x\,;\,y\,;\,z) = (2\,;\,3\,;\,-1)$

الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو $(2\,;\,3\,;\,-1)$. نستنتج أن المستويات (P_1)، (P_2) و (P_3) تشترك في نقطة واحدة هي $A(2\,;\,3\,;\,-1)$.

تمرين 2

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات $x + 2y - z - 3 = 0$ ، $2x - y + 3z - 4 = 0$ و $x - 3y + 4z - 2 = 0$ على الترتيب. • ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيّين تقاطع المستويات (P_1)، (P_2) و (P_3) نحل الجملة (S) ..... $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases}$.

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 5y = 13 \\ 5x + 5y = 14 \end{cases}$.

هذه الجملة ليس لها حل. إذن تقاطع المستويات الثلاث هو مجموعة خالية.

12 توظيف الجداء السلمي لتعيّين مجموعات نقط في الفضاء

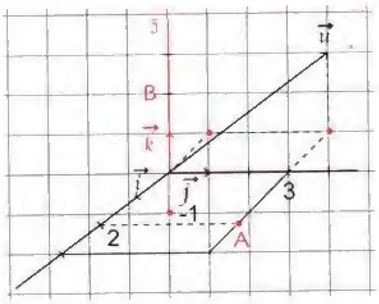
تمرين 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

A نقطة إحداثياتها $(2\,;3\,;-1)$، $\vec{u}$ شعاع إحداثياته $(-1\,;3\,;2)$.

عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=-10$.

حل



نفرض $M(x\,;y\,;z)$. لدينا $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-3\,;z+1)$

و حسب التعريف التحليلي للجداء السلمي لشعاعين يكون

$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=(-1)(x-2)+3(y-3)+2(z+1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=-10$ يكافئ $-x+3y+2z+5=0$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=-10$

هو المستوي (P) المعرف بالمعادلة $x-3y-2z-5=0$

المستوي (P) يشمل نقطة مثل $B\left(0\,;0\,;-\frac{5}{2}\right)$ و يقبل $\vec{u}(-1\,;3\,;2)$ شعاعا ناظميا له.

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$A(1\,;-1\,;4)$ ، $B(-1\,;2\,;-3)$ نقطتان من الفضاء.

1 • عين مجموعة النقط M بحيث يكون $3MA^2-2MB^2=540$.

2 • عين مجموعة النقط M بحيث يكون $MA^2-MB^2=10$.

حل

M نقطة من الفضاء احداثياتها $(x\,;y\,;z)$

$\overrightarrow{MA}(x-1\,;\,y+1\,;\,z-4)$ ؛ $\overrightarrow{MB}(x+1\,;\,y-2\,;\,z+3)$

$$MA^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=x^2+y^2+z^2-2x+2y-8z+18$$

$$MB^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+14$$

1 • $3MA^2-2MB^2=540$ يكافئ $x^2+y^2+z^2-10x+14y-36z+26=540$

أي أن $(x-5)^2+(y+7)^2+(z-18)^2+424=540$

إذن $(x-5)^2+(y+7)^2+(z-18)^2=4^2$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $3MA^2-2MB^2=540$

هي الكرة التي مركزها $\omega(5\,;-7\,;18)$ و نصف قطرها 4.

2• $MA^2 - MB^2 = 10$ يعني $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2-(x+1)^2-(y-2)^2-(z+3)^2=10$

أي أن $-4x+6y-14z+4=10$ أو $-2x+3y-7z-3=0$

و هي معادلة لمستو (P) يشمل نقطة مثل $C(0\,;1\,;0)$ و يقبل $\vec{u}\,(-2\,;3\,;-7)$ شعاعا ناظميا له.

13 كتابة معادلة ديكارتية لمستو علم تمثيل وسيطي له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(P) مستو معرف بتمثيل وسيطي له و هو $\begin{cases} x = 1+2\lambda+\gamma \\ y=-1+3\lambda+2\gamma \\ z=2+\lambda+3\gamma \end{cases}$ حيث λ ، γ عددان حقيقيان.

اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

حل

• $\begin{cases} x = 1+2\lambda+\gamma \\ y=-1+3\lambda+2\gamma \\ z=2+\lambda+3\gamma \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2\lambda+\gamma = x-1 \\ 3\lambda+2\gamma=y+1 \\ \lambda+3\gamma=z-2 \end{cases}$

نحل الجملة الاخيرة ذات المجهولين λ ، γ بإيجاد حل لجملة معادلتين مثل $\begin{cases} 2\lambda+\gamma = x-1 \\ 3\lambda+2\gamma=y+1 \end{cases}$

فيكون $(\lambda\,;\gamma)=(2x-y-3\;;\;-3x+2y+5)$ ، ثم نعوض λ و γ في المعادلة الباقية و هي

$\lambda+3\gamma=z-2$ أي $2x-y-3+3(-3x+2y+5)=z-2$

14 كتابة تمثيل وسيطي لمستو علمت معادلة ديكارتية له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ (P) مستو معرف بالمعادلة $2x+y-z+3=0$. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

حل

يعرف المستوي بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة. نختار ثلاثة نقط مثل $A\left(-\frac{3}{2}\,;0\,;0\right)$ ، $B\,(0\,;-3\,;0)$، $C\,(0\,;0\,;3)$ تنتمي إلى المستوي (P). إذن (P) يشمل A و يقبل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعي توجيه له. لدينا $\overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{2}\,;-3\,;0\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{2}\,;0\,;3\right)$ إذن يوجد عددان حقيقيان λ ، γ

بحيث $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{2}\gamma \\ y=-3\lambda \\ z=3\gamma \end{cases}$ و هذه الجملة هي تمثيل وسيطي للمستوي (P).

15 كتابة جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم علم تمثيل وسيطي له

تمرين

(D) مستقيم معرف بتمثيل وسيطي له و هو $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

حل

نعيّن جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) بالتعبير عن t بدلالة x، y، z في كل معادلة من جملة التمثيل الوسيطي، و نجد $t = \frac{x+2}{3} = \frac{-y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$.

إذن $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

مسألة 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

$A(3 ; 0 ; 10)$، $B(0 ; 0 ; 15)$ و $C(0 ; 20 ; 0)$ نقط من الفضاء.

أ) 1. عين تمثيلا وسيطا للمستقيم (AB).

2. اثبت أن (AB) يقطع محور الفواصل في نقطة E يطلب تحديد إحداثياتها.

3. تحقق أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

ب) ليكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC).

1. اثبت أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH). استنتج أن [EH] هو إرتفاع المثلث EBC.

2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (OEH).

3. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) ثمّ معادلة ديكارتية له.

4. عيّن تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC).

5. احسب المسافة OH ثمّ استنتج المسافة EH.

• تحقق أن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H.

6. احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC).

حل

أ) 1. المستقيم (AB) يشمل النقطة A و يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعا توجيهيا له.

إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$. لدينا $\overrightarrow{AB}(-3 ; 0 ; -5)$ و $\overrightarrow{AM}(x - 3 ; y ; z - 10)$

$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\begin{cases} x - 3 = -3k \\ y - 0 = 0k \\ z - 10 = 5k \end{cases}$. الجملة $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 10 + Jk \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

2. (AB) يقطع محور الفواصل $(o ; \vec{i})$ في نقطة E يعني $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ 10 + 5k = 0 \end{cases}$

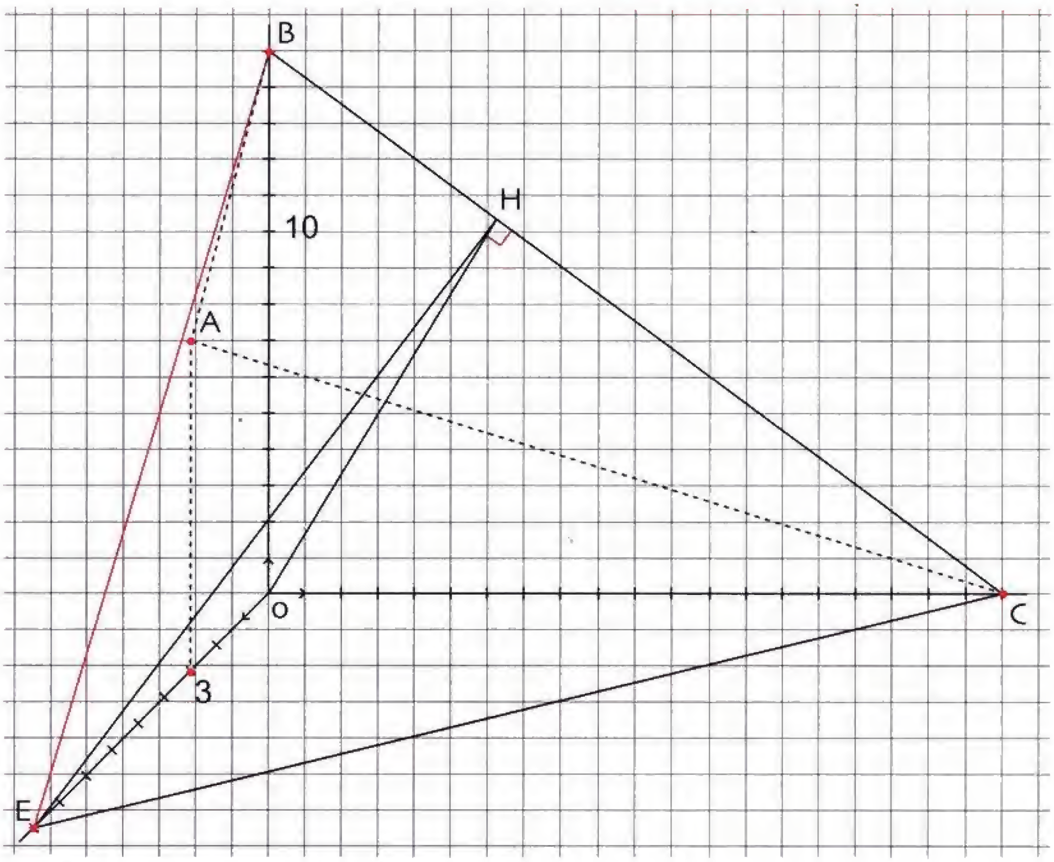
من أجل $k = -2$ نجد نقطة تقاطع (AB) و $(O ; \vec{i})$ و هي $E(9 ; 0 ; 0)$.

3. النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة لأنه لا يوجد عدد حقيقي λ يحقق $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

($\overrightarrow{AB}(-3 ; 0 ; 5)$ و $\overrightarrow{AC}(-3 ; 20 ; -10)$ و $-3 = 1\times(-3)$ و $-10 \neq 1(5)$)

ب) 1. لإثبات أن (BC) عمودي على المستوي (OEH) يكفي البرهان أن (BC) عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي (OEH).

لدينا (OE) عمودي على المستوي (OBC) فهو عمودي على المستقيم (BC) (أو (BC) عمودي على (OE)). و لدينا (BC) عمودي على (OH) إذن (BC) عمودي على (OE) و (OH) فهو عمودي على المستوي (OEH).



نستنتج أن (BC) عمودي على كل مستقيم من المستوي (OEH) فهو عمودي على (EH).

إذن [EH] هو ارتفاع المثلث EBC.

ملاحظة : • يمكن أن نبرهن أن (BC) عمودي على (OE) بحساب الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OE}$ و هو $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0(9) + 20(0) - 15(0) = 0$

2 • تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (OEH).

بما أن (OEH) ⊥ (BC) إذن $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي للمستوي (OEH). و بالتالي فللمستوي (OEH) معادلة من الشكل $o.x + 2oy - 15z + d = 0$ حيث d عدد حقيقي. بما أن O نقطة من المستوي (OEH) إذن $4y - 3z = 0$ هي معادلة للمستوي (OEH).

3 • تعيّين تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) معرف بنقطة مثل B و شعاعين توجيهيين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستوي (ABC). إذن $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ حيث λ و μ عددان حقيقيان.

لدينا $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. يكافئ $\begin{cases} x - 0 = -3\lambda - 3\mu \\ y - 0 = 0\lambda + 20\mu \\ z - 15 = 5\lambda - 10\mu \end{cases}$. إذن الجملة $\begin{cases} x = -3\lambda - 3\mu \\ y = 20\mu \\ z = 15 + 5\lambda - 10\mu \end{cases}$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي ABC :

. نحل الجملة $\begin{cases} -3\lambda - 3\mu = x \\ 20\mu = y \end{cases}$ ذات المجهولين λ، μ فنجد $\mu = \frac{y}{20}$ و $\lambda = -\frac{x}{3} - \frac{y}{20}$

ثمّ نعوض λ و μ في المعادلة $5\lambda - 10\mu = z - 15$ فنجد المعادلة $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.

طريقة أخرى: يمكن تعيين معادلة للمستوي (ABC) بتحديد شعاع ناظمي للمستوي (ABC) (العمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)، و اعتبار نقطة منه مثل B.

4 . لتعيّين تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC)

نحل الجملة $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{36}{5} \\ z = \frac{48}{5} \end{cases}$.

إذن المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) تشترك في النقطة ذات الاحداثيات $\left(0 ; \frac{36}{5} ; \frac{48}{5}\right)$.

5 . [OH] هو ارتفاع المثلث BOC القائم في O.

إذن $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ و بالتالي $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$ أي $OH^2 = 144$.

* ينتج أن $OH = 12$ لأن $OH = OB\cos x$ ؛ $OH = OC\sin x$ و $\widehat{OCH} = \widehat{BOH} = \alpha$.

. حساب EH : المثلث EOH قائم في O. إذن $EH^2 = OE^2 + OH^2 = 225$ و بالتالي $EH = 15$.

و نلاحظ أن $144 = 0^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2$ و يساوي OH^2. إذن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H.

6 . حساب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC)

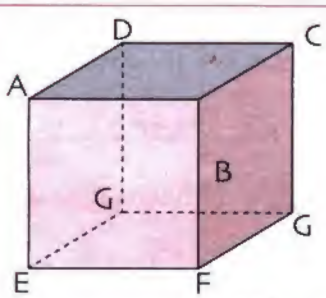
نستعمل الدستور الذي يعطي المسافة بين نقطة من الفضاء و مستو معرف بمعادلة ديكارتية له.

فيكون من أجل المبدأ O و المستوي (ABC)

$$OO' = \frac{|20(0) + 9(0) + 12(0) - 180|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{180}{\sqrt{625}} = \frac{36}{5}$$

، حيث O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

مسألة 2



نعتبر المكعب ABCDEFGH حيث AB = 1 (الشكل)

1 . احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$.

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED).

2 . نعتبر المعلم $(D ; \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{DH})$.

عيّن احداثيات النقط A ، B ، D ، G ، E.

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (BED). اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BED).

اثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED).

حل

1. لدينا $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}).\overrightarrow{BE}$

$$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BE} = 0 + 0$$

إذن $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$.

((FG) عمودي على المستوي (FBE) فهو عمودي على (BE)). إذن (AG) و (BE) متعامدان.

• لدينا أيضا $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD}$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0$$

إذن $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$

((CG) عمودي على المستوي (CBD) فهو عمودي على (BD)). إذن (AG) و (BD) متعامدان.

• المستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين (BD) و (BE) من المستوي (BED).

إذن (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. المعلم $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ متعامد و متجانس. احداثيات النقط A، B، D، G و E هي على الترتيب (0 ; 0 ; 1)، (0 ; 1 ; 1)، (0 ; 0 ; 0)، (1 ; 1 ; 0) و (1 ; 0 ; 1).

• كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

المستوي (BED) يشمل المبدأ D ويقبل $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DE}$ شعاعين توجيهيين له و بالتالي يوجد عددان حقيقيان λ و μ حيث من أجل كل نقطة M من (BED) يكون $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DB} + \mu\overrightarrow{DE}$.

لدينا $\overrightarrow{DM}(x ; y ; z)$، $\overrightarrow{DB}(1 ; 1 ; 0)$ و $\overrightarrow{DE}(1 ; 0 ; 1)$، إذن $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

• كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (BED) : بتعويض λ و μ على الترتيب بالعددين y و z في المعادلة $x = \lambda + \mu$ نجد معادلة ديكارتية للمستوي (BED) و هي $x - y - z = 0$.

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AG}$ هي (1- ; 1 ; 1) و لدينا (1- ; 1- ; 1) هي إحداثيات شعاع ناظمي $\overrightarrow{n}$ للمستوي (BED). الشعاعان $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{n}$ متوازيان (لأن $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{n}$)

إذن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BED).

ملاحظة: الشعاع $\overrightarrow{DA}$ (1 ; 1 ; 1-) ناظمي للمستوي (BED) الذي يشمل المبدأ D.

إذن $(-1)x + 1\times y + 1z + 0 = 0$ أي $-x - y - z = 0$ هي معادلة للمستوي (BED).

الجداء السلمي في المستوي

1 ABCD مربع مركزه O حيث AB = a

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}$ بدلالة a.

2 ABCD مربع حيث AB = a. I منتصف [AB] و J منتصف [AD].

أثبت أن المستقيمين (DI) و (CJ) متعامدان :

• باختيار معلم متعامد و متجانس.

• بدون استعمال معلم.

الجداء السلمي في الفضاء

3 ABCDEFGH مكعب حيث AB = a

احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH}$.

4 باختيار معلم متعامد و متجانس

احسب الجداءات السلمية الواردة في التمرين ③

5 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. تعطى النقط: $A(\sqrt{2} ; -1 ; 1)$، $B(0 ; 0 ; 2)$ و $C(\sqrt{2} ; 1 ; 1)$.

1 • احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$.

2 • ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

6 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. تعطى النقط $A(-2 ; 1 ; 4)$، $B(-1 ; -2 ; 2)$، $C(4 ; -3 ; -1)$ و $H(0 ; -5 ; 0)$.

أثبت أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

7 ABCD موشور منتظم حيث AB = a.

I، J و K منتصفات [BC]، [BD] و [AC] على الترتيب

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JK}$

المستقيم في الفضاء

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

8 1 • عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $A(1 ; 0 ; -1)$ و يقبل $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$ شعاع توجيه له.

2 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $B(2 ; 1 ; -1)$ ويقبل $\vec{v}(1 ; 1 ; 0)$ شعاع توجيه له.

3 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $C(-2 ; 1 ; 0)$ ويقبل $\vec{k}$ شعاع توجيه له.

9 1 • عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث $A(2 ; 1 ; 3)$ و $B(-1 ; 3 ; 2)$ نقطتان من الفضاء.

2 • هل يشمل (AB) النقطة $C(8 ; -3 ; 5)$؟ النقطة $D(4 ; -2 ; 1)$ ؟

10 نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$$ حيث t عدد حقيقي.

1 • عيّن من بين النقط

$A(2 ; 1 ; 0)$، $B\left(\frac{1}{2} ; -1 ; -1\right)$، $C\left(-\frac{3}{2} ; 2 ; 0\right)$ و $D\left(-\frac{5}{2} ; \frac{7}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ التي تنتمي إلى (Δ).

2 • عيّن شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

3 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ′) الذي يشمل النقطة O و يوازي (Δ).

4 • اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ′).

11 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس هل تعرف الجمل التالية نفس المستقيم ؟

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ ؛ t عدد حقيقي.

$\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - 4y - z + 3 = 0 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x - 1 = z \\ y = 1 \end{cases}$

برر إجابتك.

المستوي في الفضاء

فيما يلي، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

12 عيّن شعاعا ناظميا لكل من المستويات التالية :

$(P_1) : 2x + \frac{1}{3}y - z = 0$

$(P_2) : -5x - 2y + 3z - 1 = 0$

$(P_4) : \frac{1}{2}y - z + 1 = 0$ ؛ $(P_3) : 3x - 2y = 0$

$(P_6) : 3z - 4 = 0$ ؛ $(P_5) : x - \sqrt{2} = 0$

13 $A(4 ; -1 ; 3)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(2 ; 1 ; -3)$ شعاع.

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.

14 $A(3 ; 1 ; -1)$ نقطة و $x - 2y + z - 5 = 0$ معادلة لمستو (P). عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A و يوازي (P).

15 $A\left(2 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$، $B\left(-3 ; 4 ; -\frac{1}{2}\right)$ نقطتان. عيّن معادلة للمستوي المحوري للقطعة [AB] (الذي يشمل منتصف [AB] و يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعا ناظميا له).

16 نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة $5x - y + z + 6 = 0$ و النقطة $A(-5 ; 6 ; -2)$.

أثبت أن النقطة $B(0 ; 5 ; -1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

17 تعطى النقط $A(2 ; -1 ; 3)$، $B(-1 ; 1 ; 2)$ و $C(0 ; -1 ; 4)$.

1 • اثبت أن النقط A، B، C تعرف مستويا.

2 • عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

18 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1 ; -1 ; 2)$ و يقبل $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$ و $\vec{v}(-1 ; 1 ; 1)$ شعاعي توجيه له.

19 نفس السؤال السابق من أجل المستوي الذي يشمل النقط $A(-1 ; 2 ; 1)$، $B(3 ; 4 ; -3)$ و $C(5 ; 3 ; 2)$.

20 (P) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي

$\begin{cases} x = -2 + 3t - 2s \\ y = -t + 3s \\ z = -3 - 2t + s \end{cases}$ حيث t و s عددان حقيقيان.

من بيّن النقط $A(-2 ; -1 ; 1)$، $B(3 ; -4 ; -6)$، $C(-2 ; 0 ; -3)$، $D(1 ; -1 ; 1)$ عيّن التي تنتمي إلى المستوي (P).

21 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (P) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي

$\begin{cases} x = -3 + 4t - 2s \\ y = 4 - 5t - s \\ z = 1 + t + 3s \end{cases}$ حيث t و s عددان حقيقيان.

1 • عيّن نقطة A من المستوي (P) و شعاعي توجيه له.

2 • احسب إحداثيات شعاع ناظمي له.

3 • اكتب معادلة ديكارتية له.

الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء

22 الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

t و t' عددان حقيقيان.:

ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستقيمين (D) و (D').

1) $(D): \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -4 - t \\ z = -4 - 4t \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = -2 - t' \\ z = 4 - 4t' \end{cases}$

2) $(D): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x = t' \\ y = 3 + t' \\ z = 8 + 3t' \end{cases}$

3) $(D): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -1 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases}$

4) $(D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x = -2 + t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 2 + 3t' \end{cases}$

23 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1. اثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطين التاليين :

$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 3t' \\ z = 6 - t' \end{cases}$

حيث $t \in \mathbb{R}$ ، $t' \in \mathbb{R}$ ، متقاطعان.

2 . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل المستقيمين (Δ) و (Δ').

الوضع النسبي لمستقيم و مستو

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

24 t عدد حقيقي. ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) و المستقيم (D)، و عيّن نقط التقاطع، إن و جدت، في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(P) : 2x - y + z + 5 = 0$ و $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

2) $(P): x + 3y - z + 3 = 0$ و $(D): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$

3) $(P): x + y - 2z + 2 = 0$ و $(D): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$

25 ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) و المستقيم (D)، و عيّن نقط التقاطع، إن وجدت في كل من الحالتين التاليين :

1) $(P) : 2x - y + 3z = 0$

و $(D) : x + 1 = y - 2 = \frac{z - 4}{2}$

2) $(P) : x+y-2z-1=0$ و $(D): \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} \\ z = 2 \end{cases}$

الوضع النسبي لمستويين (أو ثلاث مستويات)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

26 ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستويين (P)، (P') و عيّن مستقيم تقاطعهما عند

1) $(P)\ x-2y+z-1=0$ و $(P')\ -2x+4y-2z+2=0$

2) $(P)\ 4x+6y-2z-1=0$ و $(P')\ 2x+3y-z+10=0$

3) $(P)\ 3x-2y-z-9=0$ و $(P')\ x-y+2z+2=0$

4) $(P)\ -x+2y+z+8=0$ و $(P')\ 2x+y+1=0$

27 ادرس فيما يلي تقاطع المستويات (P)، (Q)، و (R) حيث :

1) $(P)\ x+y+z-2=0$ و $(Q)\ 2y-z+3=0$

$(R)\ x+y+z-1=0$

2) $(P)\ x+y+z-2=0$ و $(Q)\ x-y+z+4=0$

$(R)\ x+\frac{4}{3}y+z-3=0$

3) $(P)\ x+y+z-1=0$ و $(Q)\ \frac{x}{3}+y-z=0$

$(R)\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}-\frac{1}{6}=0$

28 حل الجمل التالية ثمّ فسر بيانيا النتيجة.

1) $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ x+y-3z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ 4x+y+3z=15 \end{cases}$

مجموعات نقط من الفضاء

29 A، B و C نقط من الفضاء مع $BC=4$.

1 • عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=12$.

2 • نفس السؤال من أجل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=-10$.

30 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نفرض النقطة $A(1;-2;3)$ و الشعاع $\vec{n}(2;-1;4)$

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=-4$.

31 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=10$.

1 • عيّن النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 2 و 3 على الترتيب. أنشئ G.

2 • عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $2MA^2+3MB^2=200$.

هل تنتمي النقطة A إلى هذه المجموعة ؟

هل تنتمي النقطة B إليها ؟

32 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(1;2;3)$ و $B(3;4;2)$ نقطتان.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$2MA^2-3MB^2=-10$

33 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=5$.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2-MB^2=30$.

34 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(2;-1;3)$ و $B(2;3;1)$ نقطتان. عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2-MB^2=-10$.

مسائل

35 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. تعطي النقط $A(1;2;0)$، $B(-2;1;1)$، $C(-3;5;-1)$ و $D(-4;2;4)$.

1 • اثبت أن النقط B، C و D تعيّن مستويا (P).
عيّن معادلة ديكارتية له.

2 • عيّن إحداثيات المسقط العمودي H للنقطة A على (P).

3 • عيّن معادلة للمستوي (R) الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا له.
تحقق أن (P) و (R) متعامدان.

4 • (P) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).
إعط تمثيلا وسيطيا له.

5 • احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (Δ).

36 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لتكن النقطتان $A\left(-2;-\frac{1}{2};-2\right)$ و $B(3;3;-3)$.

1 . اكتب معادلة للكرة (S) ذات المركز A و التي تشمل B.

2 . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) المماس للكرة (s). في النقطة B.

3 . لتكن النقط $D(-2 ; -2 ; -5)$ ؛ $C(-3 ; 0 ; -3)$ ؛ $E(-1 ; 0 ; -5)$.

. تحقق أن النقط C، D و E تعيّن مستويا (Q) يطلب إيجاد تمثيل وسيطي له.

4 . بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

5 . حدّد الوضع النسبي للمستوي (Q) و الكرة (ś).
عيّن طبيعة مجموعة تقاطعهما.

37 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0 ; -1 ; 1)$ ؛ $B(0 ; 0 ; 3)$ ؛ $C(-2 ; 0 ; 0)$.

1. اثبت أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

2 . ليكن الشعاع $\vec{n}(-3 ; -4 ; 2)$

. تحقق أن $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3 . (P) و (Q) مستويان معادلتاهما على الترتيب :
$2x + y + 2z + 1 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

اثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4 . ادرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و المستوي (ABC).

5 . ليكن t عددا حقيقيا موجبا.

نعتبر المرجح G للنقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 1 ؛ 2 ؛ t على الترتيب.

أ) تحقق من وجود النقطة G من أجل كل عدد حقيقي موجب t.

ب) ليكن I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب.

. عيّن إحداثيات النقطة I.

. عبّر عن $\overrightarrow{IG}$ بدلالة $\overrightarrow{IC}$ و t.

جـ) بيّن أن مجموعة النقط G عندما يمسح t المجموعة $\mathbb{R}_+$، هي القطعة [IC] باستثناء C.

ما هي قيمة t التي من أجلها، يكون منتصف القطعة [IC] منطبقا على G؟

الهندسة في الفضاء

1 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{a^2}{2}$

2 • $(A\,;\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AJ})$ معلم متعامد و متجانس

لدينا $I\left(\frac{a}{2};0\right)$، $J\left(0;\frac{a}{2}\right)$، $C(a;a)$، $D(0;a)$

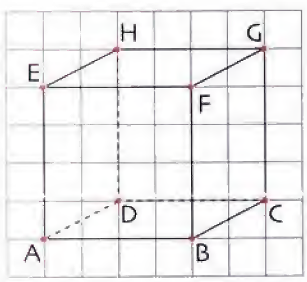
$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{CJ} = 0$ إذن (CJ) و (DI) متعامدان.

• بدون اختيار معلم

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 0$$

إذن (CJ)، (DI) متعامدان.

3 لدينا AB = a



$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = DC^2 = a^2$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH} = 0$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH} = 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\overrightarrow{BF} = 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2$

$\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}) = 2a^2$

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}).(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}) = a^2$

4 ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ (كما في الشكل السابق)

لدينا $A(0;0;0)$، $B(a;0;0)$، $C(a;a;0)$

$D(0;a;0)$، $E(0;0;a)$، $F(a;0;a)$

$G(a;a;a)$، $H(0;a;a)$.

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = a^2$ ؛ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH} = 0$ ؛ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH} = 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0$ ؛ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG} = 2a^2$ ؛ $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD} = 2a^2$

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH} = a^2$

5 1. $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{2};1;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;2;0)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(\widehat{BAC})$

و $AB = 2$ ، $AC = 2$

إذن $2 = 4\cos(BAC)$ و بالتالي $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

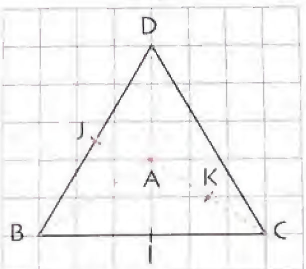
2. المثلث متساوي الأضلاع.

6 لدينا $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$ إذن $H\in(AB)$

$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$

إذن $((AB)\perp(CH))$ إذن H هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB).

7 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$



$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = AK^2 = \frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = -a^2$

8 1. $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} (\lambda\in\mathbb{R})$

2. $\begin{cases} x = 2+\mu \\ y = 1+\mu \\ z = -1 \end{cases} (\mu\in\mathbb{R})$ (3 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases} (\eta\in\mathbb{R})$

9 1. $\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases} (\lambda\in\mathbb{R})$

2. من أجل $(x\,;y\,;z) = (8\,;-3\,;5)$

يكون $\lambda=-2$ إذن $C(8;-3;5)$ تنتمي إلى (AB).

10 1. $A\notin(\Delta)$ ، $B\in(\Delta)$ ، $C\in(\Delta)$ ، $D\in(\Delta)$

2. الشعاع $\vec{u}(-2;3;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

3. الجملة $\begin{cases} x = -2\eta \\ y = 3\eta \\ z = \eta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ')

4. المعادلتان $\frac{x}{-2} = \frac{x}{3} = z$ هما جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ').

11 الجمل الثلاث متكافئة (لها نفس الحلول) إذن فهي تعرف نفس المستقيم (الذي يشمل $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه له).

12 $\vec{n}_1\left(2;\frac{1}{3};0\right)$ ، $\vec{n}_2(-5;-2;3)$ ، $\vec{n}_3(3;-2;0)$ ، $\vec{n}_4\left(0;\frac{1}{2};-1\right)$ ، $\vec{n}_5(1;0;0)$ ، $\vec{n}_6(0;0;3)$

اشعة ناظمية للمستويات (P_1)، (P_2)، (P_3)، (P_4)، (P_5)، (P_6) بهذا الترتيب

13 $\vec{u}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) حيث $(P): 2x+y-3z+d=0$ ، و يشمل $A(4;-1;3)$

إذن $(P): 2x+y-3z+2=0$

14 $(P)//(Q)$ يعني أن $\vec{n}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) الذي يشمل A إذن $(Q)\ x-2y+z=0$

15 المستوي المحوري (P) للقطعة $[AB]$ يشمل منتصفها $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)$ و يقبل شعاعا ناظميا له $\overrightarrow{AB}\left(-5;-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$ إذن $(P): -5x+\frac{7}{2}y-\frac{7}{2}z-6=0$

16 $B\in(P)$، $AB=3\sqrt{3}$، و المسافة بين A و (P) هي $\frac{27}{3\sqrt{3}}$ أي $3\sqrt{3}$ إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

17 1. النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة إذن تعرف مستويا.

2. $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية لمستو(P)

A، B، C نقط من (P) يعني $\begin{cases}2a-b+3c+d=0\\-a+b+2c+d=0\\-b+4b+d=0\end{cases}$

بحل الجملة ذات المجاهيل a، b، c و اختيار d (مثلا $d=-11$) نجد $2x+5y+4z-11=0$

و هي معادلة للمستوي (ABC)

18 $\begin{cases}x=1+\lambda-\mu\\y=-1+\lambda+\mu\\z=2+\lambda+\mu\end{cases}$ (λ، μ عددان حقيقيان)

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

19 $\begin{cases}x=-1+4\lambda+6\mu\\y=2+2\lambda+\mu\\z=1-4\lambda+\mu\end{cases}$ (λ، μ عددان حقيقيان)

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

20 $A\notin(P)$ ، $B\in(P)$ ، $C\in(P)$ ، $D\notin(P)$

21 1. $A(-3;4;1)$ ، $\vec{u}(4;-5;1)$ ، $\vec{v}(-1;-1;3)$

2. $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني $\vec{n}\,\vec{u}=0$ ، و $\vec{n}\,\vec{v}=0$ نجد $\vec{n}(1;1;1)$

3. $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P)

22 1. (D)، (D') لهما شعاعا توجيه متساويان و يشتركان في نقطة (مثل $A(-6;-2;4)$)

إذن (D)، (D') متطابقان

2. (D)، (D') لهما شعاعا توجيه متساويان و لا يشتركان في أية نقطة إذن D، D' متوازيان

3. (D)، (D') لهما شعاعا توجيه غير متوازيين إذن (D)، (D') إما متقاطعان أو غير مستويين (ليسا من نفس المستوي).

بحل الجملة $\begin{cases}-1+2t=2+t'\\1-t=-1-t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=1\\t'=-1\end{cases}$

من أجل $t=1$ نجد النقطة من (D) ذات الاحداثيات $(1;0;3)$

من أجل $t'=-1$ نجد النقطة من (D') ذات الاحداثيات $(1;0;3)$ إذن يشتركان في النقطة $A(1;0;3)$

4. شعاعا توجيه (D)، (D') غير متوازيين

إذن (D)، (D') متقاطعان أو غير مستويين

نحل الجملة $\begin{cases}-1+t=-2+t'\\2+t=4+2t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=-4\\t'=-3\end{cases}$

من أجل $t=-4$ نجد النقطة من (D)

ذات الاحداثيات $(-5 ; -2 ; -5)$.

من أجل $t' = -3$ نجد النقطة من (D') ذات الاحداثيات $(-7 ; -2 ; -5)$.

إذن (D)، (D') لا يشتركان في أية نقطة و منه (D)، (D') غير مستويين (لا يشملها مستو).

23 1 . شعاعا توجيه (Δ)، (Δ') غير متوازيين فهما متقاطعان أو غير مستويين.

نحل الجملة $\begin{cases} 3 + 5t = 2 + t' \\ 7 + 4t = 6 - t' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases}$

$t = 0$ نجد $A(3 ; -2 ; 7)$ من (Δ)

$t' = -1$ نجد نفس النقطة A من (Δ')

إذن (Δ)، (Δ') يشتركان في النقطة A

2 . الشعاع الناظمي $\vec{\eta}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ للمستوي (P) الذي يشمل (Δ)، (Δ') عمودي على الشعاعين التوجيهيين $\vec{u}(5 ; -1 ; 4)$، $\vec{v}(-1 ; 3 ; -1)$

إذن $\begin{cases} 5\alpha - \beta + 4\gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ حيث γ وسيط حقيقي.

نجد $(\alpha ; \beta ; \gamma) = \left(-\frac{11}{14}\gamma ; \frac{\gamma}{14} ; \gamma\right)$ حيث $\gamma \neq 0$.

و من أجل $\gamma = 14$: $(\alpha ; \beta ; \gamma) = (-11 ; 1 ; 14)$

النقطة ذات الاحداثيات $(2;1;6)$ تنتمي إلى (P)

إذن $11x - y - 14z + 63 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

24 1 . $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{u}(1 ; -3 ; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

$\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ إذن (P)، (D) متقاطعان في نقطة احداثياتها $\left(\frac{2}{3} ; 3 ; -\frac{4}{3}\right)$. (من أجل $t = -\frac{7}{3}$)

2 . $\vec{n}(1 ; 3 ; -1)$، $\vec{u}(3 ; -1 ; 0)$، $\vec{n}.\vec{u} = 0$

النقطة من $A(-2 ; -1 ; 2)$ من (D) لا تنتمي إلى (P)

إذن (P)، (D) متوازيان.

3 . $\vec{n}(1 ; 1 ; -2)$، $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$، $\vec{n}.\vec{u} = 0$

النقطة من $A(4 ; 0 ; 3)$ من (D) تنتمي إلى (P)

إذن $(D) \subset (P)$.

25 1. (D)، (P) متقاطعان في النقطة ذات لاحداثيات $\left(\frac{12}{7} ; \frac{6}{7} ; -\frac{15}{7}\right)$.

2 . (D)، (P) متقاطعان في النقطة ذات الاحداثيات $(10 ; -5 ; 2)$

26 1. (P)، (P') منطبقان عن بعضهما (متوازيان و يشتركان في نقطة).

2 . (P)، (P') متوازيان (تماما).

3 . (P)، (P') متقاطعان في مستقيم.

تعيين مستقيم التقاطع يكون بحل الجملة

$\begin{cases} 3x - 2y - z - 9 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ و اعتبار أحد المجاهيل (مثلا $z = t$) وسيطا. و نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم المشترك بين (P)، (P') : $\begin{cases} x = 5t + 13 \\ y = 7t + 15 \\ z = t \end{cases}$، $(t \in \mathbb{R})$

4 . (P)، (P') متقاطعان في مستقيم معرّف بتمثيل وسيطي له $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 5t - 6 \end{cases}$، $(t \in \mathbb{R})$

27 1 . (P)، (R) متوازيان إذن $(P) \cap (Q) \cap (R) = (\varnothing)$

2 . (P)، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعرف بتمثيل وسيطي $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$، $(t \in \mathbb{R})$

شعاع توجيهه $\vec{u}(-1;0;1)$ عمودي على الشعاع الناظمي $\vec{n}\left(1;\frac{4}{3};1\right)$ للمستوي (R)

إذن $(P)\cap(Q)\cap(R) = (\varnothing)$.

3 . (P)، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعرف

بتمثيل وسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases}$ ، $(t \in \mathbb{R})$

شعاع توجيهه $\vec{u}\left(1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ غير عمودي على (R)

(Δ) و (R) يتقاطعان في النقطة $A\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

إذن $(P)\cap(Q)\cap(R) = \{A\}$.

28 1 . $(x;y;z) = (1;2;3)$

المستويات الثلاث تتقاطع في النقطة $A(1 ; 2 ; 3)$

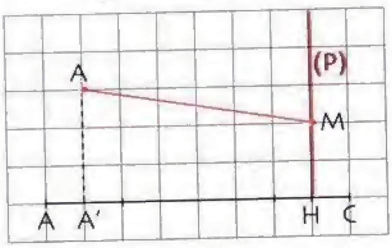
2 . الجملة ليس لها حل. المستويات الثلاثة لا تشترك في أية نقطة.

3 . الجملة لها ما لا نهاية من الحلول المستويات الثلاثة تشترك في مستقيم معرّف بتمثيل

وسيطي $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases}$ ، $(t \in \mathbb{R})$

29 نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه $\overrightarrow{BC}$

1 . نسمي H ، A' المسقطين العموديين على (BC) لكل من النقطتين M ، A بهذا الترتيب



لدينا $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H} = 12$

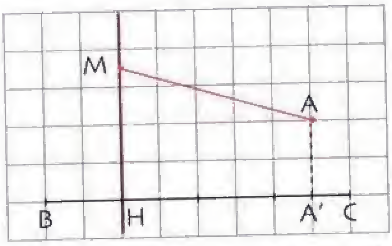
$\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{A'H}$ لهما نفس الاتجاه إذن $A'H = 3$ ، إذن

مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 12$

هي المستوى الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

2 . $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H} = -10$ مع $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{A'H}$

في اتجاهين متعاكسين. $A'H = -\frac{5}{2}$.



مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = -10$ هو المستوي الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

30 $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = -4$ يعني $2x - y + 4z - 16 = 0$

مجموعة النقط M هي مستو معرف بالمعادلة السابقة.

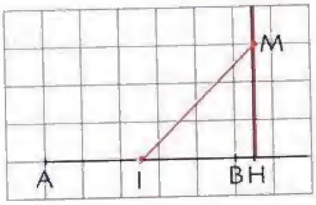
31 • مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$2MA^2 + 3MB^2 = 200$ هي كرة S مركزها النقطة G مرجح النقطتين $A(2)$ ، $B(3)$ و نصف قطرها 4

$A \notin S$ ، $B \in S$

32 مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $2MA^2 - 3MB^2 = -10$ هي الكرة ذات المعادلة $(x-7)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 64$، مركزها $\omega(7;8;0)$ و نصف قطرها 8.

33 مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ من الفضاء حيث $MA^2 - MB^2 = 30$ هي المستوي العمودي على (AB) في النقطة H، المسقط العمودي للنقطة M على (AB)، حيث $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} = 15$ أو $IH = 3$



($\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{IH}$) لهما نفس الإتجاه I منتصف $[AB]$)

34 مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ حيث $MA^2 - MB^2 = -10$ هو المستوي المعرف بالمعادلة الديكارتية $4y - 2z + 5 = 0$

35 1 . B، C، D ليست على استقامة واحدة، إذن تعيين مستويا (P) معادلته الديكارتية هي $2x + y + z + 2 = 0$

2 . $A(1;2;0)$ لا تنتمي إلى (P)

نضع $H(x_0 ; y_0 ; z_0)$ لدينا $\overrightarrow{AH}$ يوازي $\vec{n}$ ($\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي (P)).

إذن $\begin{cases} x_0 = 2t + 1 \\ y_0 = t + 2 \\ z_0 = t \end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي مع $H \in (P)$

إذن $H(-1;1;-1)$.

3 . $x - 4y + 2z + 7 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

الشعاعان الناظميان $\vec{n}(2;1;1)$، $\vec{n}'(1;-4;2)$ متعامدان إذا (P)، (R) متعامدان.

4 . نحل الجملة $\begin{cases} 2x + y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$

مع اعتبار احد المجاهيل (z مثلا) وسيطا فنجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ): $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$

5 . لدينا O'، K، L مساقط O على (Δ)، (P)، (R) على الترتيب. نجد $OO' = \sqrt{3}$

36 1 . معادلة الكرة $S(A;AB)$

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 36$

2 . $\overrightarrow{AB}(4;4;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و الذي يشمل B. $(P) : 2x + 2y - z - 15 = 0$

3 . النقط C، D، E ليست على استقامة واحدة، إذن تعين مستويا (Q) حيث الجملة $\begin{cases} x = -3 + \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -3 - 2\lambda - 2\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي له.

4 . $\vec{n}(2 ; -1 ; 2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).
$\vec{n}$، $\overrightarrow{AB}$ متعامدان إذن (P)، (Q) متعامدان.

5 . $2x - y + 2z + 12 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q)، $AB = 6$، $d(A ; Q) = 3$.

$d(A ; Q)$ هي المسافة بين A مركز الكرة S و المستوي (Q). لدينا $d(A ; Q) < AB$

إذن (Q) يقطع S في دائرة نصف قطرها r حيث $r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ و مركزها A' المسقط العمودي للنقطة A على (Q) حيث $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AA'}(x_0 + 1 ; y_0 + 1 ; z_0 + 1)$ متوازيان و $A' \in (Q)$.
إذن $A'(-3 ; 0 ; -3)$

37 1. الشعاعان $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير متوازيين إذن A، B، C ليست على استقامة واحدة.

2 . $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ إذن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. $(ABC) : -3x - 4y + 2z - 6 = 0$

3 . $\vec{n_1}(2;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (P).
$\vec{n_2}(1;-2;6)$ شعاع ناظمي لـ (Q).
$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير متوازيين إذن (P) و (Q) متقاطعان.

وفق مستقيم، تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -2 + -\frac{2}{5} \\ y = -2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}$

4 . نجد $t = \frac{1}{4}$.

نقطة تقاطع (D) و (ABC) هي $E\left(-\frac{9}{10}; -\frac{7}{10}; \frac{1}{4}\right)$

5 . أ) من أجل كل عدد حقيقي موجب t، $t + 2 + 1 \neq 0$
إذن المرجح G موجود.

ب) $I\left(0 ; -\frac{1}{3} ; \frac{7}{3}\right)$، $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3 + t}\overrightarrow{IC}$.

ج) من أجل كل عدد موجب t : $0 \leq \frac{t}{3 + t} < 1$.

إذن G تنتمي إلى القطعة [IC] باستثناء النقطة C.

لدينا $\frac{t}{3 + t} = \frac{1}{2}$ إذن $t = 3$.

من أجل $t = 3$ ، G هي منتصف [IC].

Hard_equation

كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
- الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
- تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.

يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمرينا و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمرينا و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان الباكالوريا على التحضير الجيد.

9 789961 635902

CHIHAB